<u>ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ</u>
<u>ΕΡΓΑΣΙΑ 2</u>
<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ</u>

1. Σώμα μάζας m=15/π Kg εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R=20/π m με φορά αντίθετη απ' τους δείκτες του ρολογιού. Αν το σώμα για να διαγράψει γωνία 36^o χρειάζεται χρόνο 2s, να βρείτε :
α) το μέτρο και την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.
β) το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος.
γ) την περίοδο και τη συχνότητα της κίνησης.
δ) το μέτρο και την κατεύθυνση της γραμμικής και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος.
ε) το μέτρο και την κατεύθυνση της συνισταμένης των δυνάμεων που δέχεται το σώμα.

(π/10 rad/s, 2m/s, 20s, 0,05Hz, π/5 m/s^2, 0, 3N)

2. Σώμα μάζας m=2Kg, κινείται σε κυκλική τροχιά στο επίπεδο της σελίδας ακτίνας R=1m με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $α_{γων}$=4rad/s^2 με φορά κάθετη προς τη σελίδα προς τα κάτω (προς το πάτωμα). Αν τη χρονική στιγμή t_o=0, το σώμα έχει γωνιακή ταχύτητα $ω_o$=5rad/s ίδιας κατεύθυνσης με τη γωνιακή επιτάχυνση και βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του, να βρείτε :
α) τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1=5s.
β) τον αριθμό των περιστροφών του σώματος από τη χρονική στιγμή t_o=0 έως τη χρονική στιγμή t_1=5s.
γ) την κεντρομόλο, την επιτρόχια και τη γραμμική επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_o=0 (να σχεδιαστούν τα διανύσματα τους).
δ) τη συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το σώμα σε μέτρο και κατεύθυνση τη χρονική στιγμή t_o=0.
Δίνονται $\sqrt{641} = 25{,}3$ και εφ81^o=6,25

Σας υπενθυμίζω ότι οι εξισώσεις της ομαλά μεταβαλλόμενης κυκλικής κίνησης, προκύπτουν από τις αντίστοιχες της ευθύγραμμης αν αντικαταστήσουμε την ταχύτητα με τη γωνιακή ταχύτητα, την επιτάχυνση με τη γωνιακή επιτάχυνση και τη μετατόπιση με τη γωνία.

3. Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R=1/π m και σε χρόνο 5s διαγράφει 10 πλήρεις περιστροφές. Να βρεθεί :
α) Σε πόσο χρόνο το σώμα διαγράφει τόξο μήκους Δs=20m.
β) Πόσο μήκος έχει η περιφέρεια της τροχιάς του σώματος.
γ) Πόσες μοίρες γωνία θα έχει διαγράψει το σώμα σε χρόνο Δt=0,25s.
δ) Πόσο χρόνο χρειάζεται το σώμα για να κάνει μια πλήρη περιστροφή.

(5s, 2m, 180^o, 0,5s)

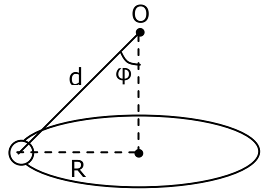
4. Λεπτή ράβδος ΑΒ μήκους d=60cm περιστρέφεται γύρω από το άκρο της Α έτσι ώστε κάθε σημείο της να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση (εκτός φυσικά από το άκρο Α που παραμένει συνεχώς ακίνητο). Αν η γραμμική ταχύτητα του μέσου Μ της ράβδου έχει μέτρο $|υ_M|$=π/10 m/s, να βρεθούν :
α) Η γωνιακή ταχύτητα των σημείων Μ, Β καθώς και του σημείου Γ το οποίο απέχει από το Α απόσταση (ΑΓ)=45cm. Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε από τους παραπάνω υπολογισμούς;
β) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων Γ και Β.
γ) Η περίοδος και η συχνότητα των σημείων Μ, Γ και Β. Τι παρατηρείτε;
δ) Το τόξο που θα διαγράφει το άκρο Β σε χρόνο 10/π s.

(π/3 rad/s, 3π/20 m/s, π/5 m/s, 6s, 1/6 Hz, 2m)

5. Δύο σώματα βρίσκονται κάποια στιγμή στο ίδιο σημείο και εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση στην ίδια κυκλική τροχιά. Αν τα δύο σώματα περιστρέφονται με αντίθετες φορές περιστροφής και έχουν συχνότητες f_1=1/16 Hz και f_2=3/16 Hz, να βρεθεί :
α) Σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν για πρώτη φορά.
β) Πόση γωνιά θα έχει διαγράψει το κάθε σώμα μέχρι την πρώτη συνάντηση.

(4s, 90^o, 270^o)

6. Σώμα μάζας m=3,9Kg είναι δεμένο στο ένα άκρο νήματος μήκους d=3,2m και ορίου θραύσης $|T_{θρ}|$=80N. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο O όπως φαίνεται στο σχήμα :



Η κίνηση του σώματος γίνεται έτσι ώστε το νήμα να σχηματίζει συνέχεια γωνία φ με την κατακόρυφο και το σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο (το σύστημα αυτό λέγεται κωνικό εκκρεμές). Να βρεθούν

α) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος.

β) Η τάση T του νήματος.

γ) Η μεγαλύτερη δυνατή μάζα που μπορεί να έχει το σώμα ώστε να μη σπάσει το νήμα αν κινείται στην ίδια κυκλική τροχιά.

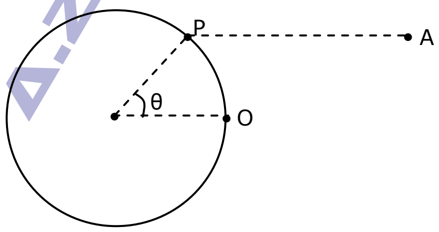
Δίνονται |g|=10m/s^2, ημφ=0,624 και συνφ=0,78.

(4m/s, 50N, 6,24Kg)

7. Ένας δορυφόρος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα σε ύψος h=600Km από την επιφάνεια της γης η οποία θεωρείται ακίνητη. Να βρεθεί το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του δορυφόρου. Δίνεται η ακτίνα της γης $R_Γ$=6400Km και η επιτάχυνση της βαρύτητας στο ύψος που περιστρέφεται ο δορυφόρος g=8,25 m/s^2.

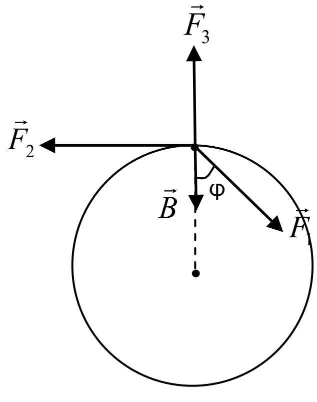
(7600m/s)

8. Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα μέτρου |ω|=π/6 rad/s και κατεύθυνση κάθετη στη σελίδα με φορά προς τον αναγνώστη και τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στο σημείο O της τροχιάς του. Την ίδια στιγμή (t=0) ένα άλλο σώμα βρίσκεται στο σημείο A και εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.



Αν είναι γνωστό ότι τα δύο σώματα συναντιόνται στο σημείο P και μέχρι τη συνάντηση το πρώτο σώμα δεν έχει κάνει πλήρη περιστροφή, να βρεθεί η χρονική στιγμή της συνάντησης και το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$. Δίνεται (AP)=10m και θ=60^o.

9. Σώμα μάζας m=5Kg εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R=4m. Όταν το σώμα βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του δέχεται τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα :



με $|F_1|$=200N, $|F_3|$=150N, $|g|$=10m/s^2, ημφ=0,8 και συνφ=0,6.
Να βρεθούν τα μέτρα της γραμμικής ταχύτητας του σωματιδίου και της δύναμης $\vec{F}_2$.

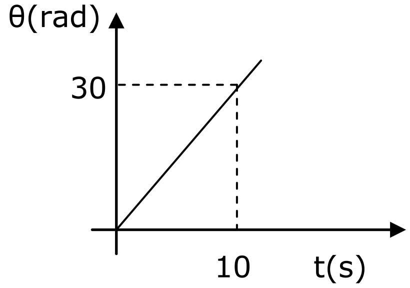
9. Σώμα μάζας m=2Kg, κινείται σε κυκλική τροχιά στο επίπεδο της σελίδας ακτίνας R=1m με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $α_{γων}$=4rad/s^2 με φορά κάθετη προς τη σελίδα προς τα κάτω (προς το πάτωμα). Αν τη χρονική στιγμή t_o=0, το σώμα έχει γωνιακή ταχύτητα $ω_o$=5rad/s ίδιας κατεύθυνσης με τη γωνιακή επιτάχυνση και βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του, να βρείτε :
α) τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1=5s.
β) τον αριθμό των περιστροφών του σώματος από τη χρονική στιγμή t_o=0 έως τη χρονική στιγμή t_1=5s.
γ) την κεντρομόλο, την επιτρόχια και τη γραμμική επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_o=0 (να σχεδιαστούν τα διανύσματα τους).
δ) τη συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το σώμα σε μέτρο και κατεύθυνση τη χρονική στιγμή t_o=0.
Δίνονται $\sqrt{641} = 25{,}3$ και εφ81^o=6,25
Σας υπενθυμίζω ότι οι εξισώσεις της ομαλά μεταβαλλόμενης κυκλικής κίνησης, προκύπτουν από τις αντίστοιχες της ευθύγραμμης αν αντικαταστήσουμε την ταχύτητα με τη γωνιακή ταχύτητα, την επιτάχυνση με τη γωνιακή επιτάχυνση και τη μετατόπιση με τη γωνία.

10. Σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση. Τη χρονική στιγμή t_o=0, το σώμα περιστρέφεται με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $ω_o$=20rad/s.Το σώμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $α_{γων}$=2rad/s^2, η κατεύθυνση της οποίας είναι αντίθετη με αυτή της $ω_o$.
α. Να βρείτε την κατεύθυνση των διανυσμάτων $\vec{ω}_o$ και $\vec{α}_{γων}$.
β. Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος, τις χρονικές στιγμές t=6s και t=12s σε μέτρο και κατεύθυνση.
γ. Να βρείτε ποια χρονική στιγμή, το σώμα θα σταματήσει στιγμιαία.
δ. Να βρείτε τη γωνία και τον αριθμό περιστροφών, που θα διαγράψει το σώμα από τη χρονική στιγμή t_o=0 έως τη χρονική στιγμή t=5s.
ε. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση ω-t, από τη χρονική στιγμή t_o=0 έως τη χρονική στιγμή t=20s.
στ. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του προηγούμενου ερωτήματος, να βρείτε τη γωνία που έχει διαγράψει το σώμα από τη χρονική στιγμή t=2s έως τη χρονική στιγμή t=8s.

11. Σώμα, εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R=20cm. Το σώμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $α_{γων}$ και έχει κάποια στιγμή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $ω_o$=6 rad/s με κατεύθυνση ίδια με αυτήν της γωνιακής επιτάχυνσης. Είναι γνωστό ότι μετά από χρονικό διάστημα Δt, το σώμα έχει διαγράψει γωνία 80 rad και έχει γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω=26 rad/s. Να βρεθούν :
α. Το χρονικό διάστημα Δt.
β. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $α_{γων}$.
γ. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος μετά από χρονικό διάστημα Δt.
δ. Το μέτρο της κεντρομόλου, της επιτρόχιας και της γραμμικής επιτάχυνσης του σώματος μετά από χρονικό διάστημα Δt.

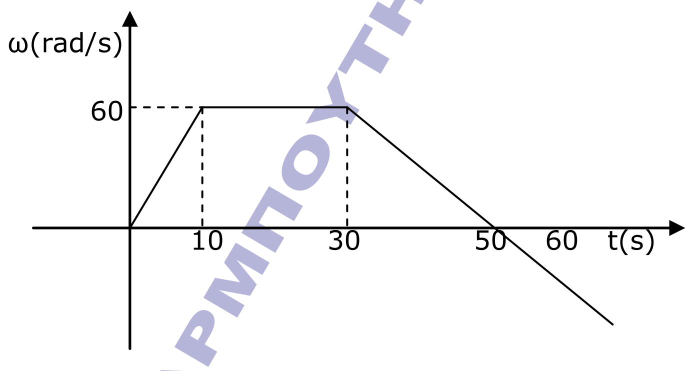
12. Σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας r=2cm. Το σώμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα αλγεβρικής τιμής $ω_o$=10rad/s από τη στιγμή t_o=0 έως τη στιγμή t=20s. Στη συνέχεια η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας μειώνεται με σταθερό ρυθμό και τη χρονική στιγμή t=30s είναι ω=-40rad/s.
α. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση κάθε στιγμή, από τη στιγμή t_o=0 έως τη στιγμή t=30s.
β. Να βρεθεί η γωνία που θα περιστραφεί το σώμα, από τη στιγμή t_o=0 έως τη στιγμή t=22s.
γ. Να βρεθεί η γραμμική επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t=10s.

13. Σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση. Η γραφική παράσταση της γωνίας θ που διαγράφει ο δίσκος σε συνάρτηση με το χρόνο, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα και τη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές t_1=2s, t_2=4s, t_3=6s.

14. Σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του σώματος ω σε συνάρτηση με το χρόνο, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



α. Να περιγραφεί η κίνηση του σώματος.
β. Να γίνει η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη χρονική στιγμή t_o=0 έως τη χρονική στιγμή t=60s.
γ. Να βρεθεί η γωνία που έχει διαγράψει το σώμα από τη χρονική στιγμή t_o=0 έως τη χρονική στιγμή t=50s.

Από το σχολικό βιβλίο οι ερωτήσεις **4-9, 11-13, 15-20** (όχι το Δ στη 18) και οι ασκήσεις **3-10**.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

180° — π rad

36° — x;

$x = \frac{\pi}{5}$ rad

α) $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{5}}{2} = \frac{\pi}{10}$ rad/s

με κατεύθυνση προς τα πάνω

$\vec{\omega} \otimes$

β) $\upsilon = \omega \cdot R = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{20}{\pi} = 2$ m/s

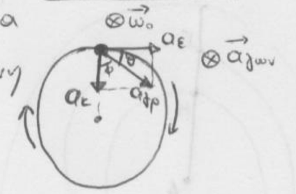
γ) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20s$, $f = \frac{1}{T} = 0{,}05$ Hz

δ) $a_{\gamma\rho} = a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{4}{\frac{20}{\pi}} = \frac{4\pi}{20} = \frac{\pi}{5}$ m/s^2 με κατεύθυνση κάθε στιγμή προς το κέντρο της τροχιάς.

ε) $\Sigma F = m a_{\gamma\rho} = \frac{15}{\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 3N$ με κατεύθυνση ίδια με αυτήν της γραμμικής επιτάχυνσης.

Άσκηση 2

Αφού $\vec{a}_{\gamma\omega\nu} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$, το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση.



$\varepsilon\varphi\theta = \frac{a_\kappa}{a_\varepsilon} = \frac{25}{4} = 6{,}25$

άρα $\theta = 81^\circ$

α) $\omega = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} \Delta t = 5 + 4 \cdot 5 = 25$ rad/s

β) Από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 5s$, το σώμα έχει διαγράψει γωνία

$\Delta\theta = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} \Delta t^2 = 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 = 25 + 50 = 75$ rad.

Άρα μέχρι τότε το σώμα έχει διαγράψει $N = \frac{75}{2\pi} = \frac{75}{6{,}28} \simeq 11{,}9$ περιστροφές

γ) $a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R = 25$ m/s^2

$a_\varepsilon = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R = 4$ m/s^2

$a_{\gamma\rho} = \sqrt{a_\kappa^2 + a_\varepsilon^2} = \sqrt{641} = 25{,}3 \frac{m}{s^2}$

$\varepsilon\varphi\phi = \frac{a_\varepsilon}{a_\kappa} = \frac{4}{25} = 0{,}16 \rightarrow \phi = 9^\circ$

δ) $\Sigma F = m\alpha_{\kappa} = 50,6N$

με ίδια κατεύθυνση με την $\vec{\alpha}_{\kappa}$.

Άσκηση 3

α) $f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{10}{5} = 2Hz$

$\upsilon = 2\pi R f = 2\pi \frac{1}{\pi} 2 = 4\ m/s$

$\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t} \longrightarrow \Delta s = \upsilon \cdot \Delta t \longrightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{\upsilon} = 5s$

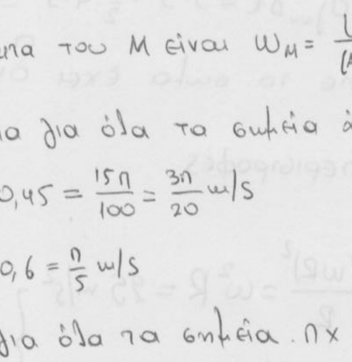
β) $l = 2\pi R = 2\pi \frac{1}{\pi} = 2m$

γ) $\omega = \frac{\upsilon}{R} = \frac{4}{\frac{1}{\pi}} = 4\pi\ rad/s$

$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \longrightarrow \Delta\theta = \omega \cdot \Delta t = 4\pi \cdot 0,25 = \pi\ rad$ ή $\Delta\theta = 180°$

δ) $T = \frac{1}{f} = 0,5s$.

Άσκηση 4



α) Η γωνιακή ταχύτητα του Μ είναι $\omega_M = \frac{\upsilon_M}{(AM)} = \frac{\frac{\pi}{10}}{0,3} = \frac{\pi}{3}\ rad/s$

και είναι η ίδια για όλα τα σημεία άρα $\omega_M = \omega_\Gamma = \omega_B = \frac{\pi}{3}\ rad/s$

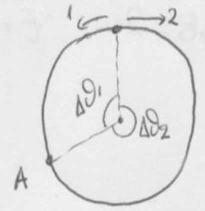
β) $\upsilon_\Gamma = \omega_\Gamma \cdot R_\Gamma = \frac{\pi}{3} 0,45 = \frac{15\pi}{100} = \frac{3\pi}{20}\ m/s$

$\upsilon_B = \omega_B \cdot R_B = \frac{\pi}{3} \cdot 0,6 = \frac{\pi}{5}\ m/s$

γ) Είναι η ίδια για όλα τα σημεία. πχ για το Μ, $T_M = \frac{2\pi}{\omega_M} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}$

$\longrightarrow T_M = 6s$. δ) $\Delta s = \upsilon_B \Delta t = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{10}{\pi} = 2m$.

Άσκηση 5



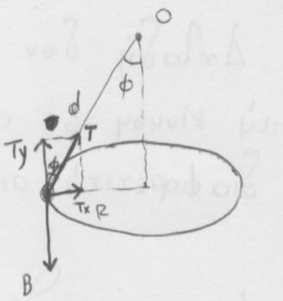
α) Για το χρονικό διάστημα Δt απ' τη στιγμή που ξεκίνησαν μέχρι τη συνάντηση θα ισχύει: $\Delta\theta_1+\Delta\theta_2=2\pi \longrightarrow \omega_1\Delta t+\omega_2\Delta t=2\pi$

$$\longrightarrow 2\pi f_1\Delta t+2\pi f_2\Delta t=2\pi \longrightarrow (f_1+f_2)\Delta t=1 \longrightarrow \Delta t=\frac{1}{f_1+f_2}=4s$$

β) $\Delta\theta_1=\omega_1\Delta t=2\pi f_1\Delta t=2\pi\frac{1}{16}\cdot 4=\frac{\pi}{2}\,rad=90^\circ$

$\Delta\theta_2=\omega_2\Delta t=2\pi f_2\Delta t=2\pi\frac{3}{16}\cdot 4=\frac{3\pi}{2}\,rad=270^\circ$

Άσκηση 6



Στο σώμα ασκούνται το βάρος του B και η τάση του νήματος T, η οποία αναλύεται σε συνιστώσες $T_x=T\eta\mu\phi$ και $T_y=T\sigma\upsilon\nu\phi$

α) Αφού το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται να είναι προς το κέντρο της τροχιάς. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει $T_y=B$ ώστε $\Sigma F=T_x$. Άρα απ' τη σχέση $T_y=B$ έχουμε $T\sigma\upsilon\nu\phi=mg \longrightarrow T=\frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\phi}$ (1)

$\longrightarrow T=50N$ άρα $\Sigma F=T_x=T\eta\mu\phi=31{,}2N$

Ξέρουμε ότι στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι $\Sigma F=m\frac{u^2}{R} \longrightarrow u=\sqrt{\frac{\Sigma F\cdot R}{m}}$ (2). Για να βρούμε την ακτίνα R πάμε στο σχήμα απ' όπου έχουμε:

$\eta\mu\phi = \frac{R}{d} \rightarrow R = d\,\eta\mu\phi = 1{,}9968 \simeq 2m$. Έτσι από την 2

προκύπτει $v = \sqrt{16} = 4\,m/s$.

β) Η τάση βρέθηκε $T = 50N$

γ) Γενικά ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} T\cdot\eta\mu\phi &= \frac{mv^2}{R} \\ T\cdot\sigma\upsilon\nu\phi &= mg \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\%} \varepsilon\phi\phi = \frac{mv^2}{Rmg} \longrightarrow v = \sqrt{Rg\,\varepsilon\phi\phi}$$

Απ' αυτή τη σχέση φαίνεται ότι αν το σώμα κινείται στην ίδια κυκλική τροχιά θα είναι R = σταθ και εφφ = σταθ άρα και v = σταθ. Δηλαδή δεν γίνεται το σώμα να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε αυτήν την τροχιά και να έχει ταχύτητα διαφορετική απ' αυτή που βρήκαμε στο ερώτημα α.

Άρα το σώμα και μετά που θα αλλάξουμε τη μάζα του θα έχει $v = 4\,m/s$

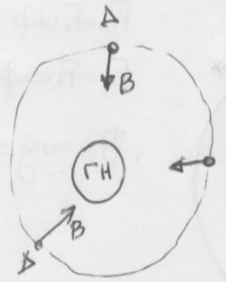
Η καινούργια τάση T' για την κατάσταση που το νήμα είναι οριακά να σπάσει, είναι λόγω της σχέσης 1

$T' = \frac{m'g}{\sigma\upsilon\nu\phi}$ (3). Όταν το νήμα είναι οριακά να σπάσει

είναι $T' = T_{\theta\rho} = 80N$ άρα από την 3 έχουμε ότι

$m' = \frac{T'\sigma\upsilon\nu\phi}{g} = 6{,}24\,Kg$

Άσκηση 7



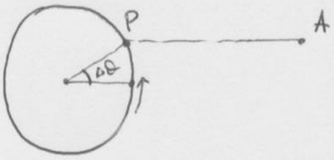
Η μοναδική δύναμη που δέχεται ο δορυφόρος είναι το βάρος του που έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της γης.

Άρα αφού ο δορυφόρος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, θα είναι $\Sigma F = m\frac{\upsilon^2}{R} \rightarrow \cancel{m}g = \cancel{m}\frac{\upsilon^2}{R} \rightarrow \upsilon = \sqrt{Rg} =$

$$= \sqrt{(R_\Gamma + h)g} = \sqrt{(7\cdot 10^6 m)\cdot(8{,}25\, m/s^2)} = \sqrt{57{,}75\cdot 10^6} = \sqrt{57{,}75}\cdot 10^3$$

$$\cong 7{,}6\cdot 10^3\, m/s = 7600\, m/s$$

Άσκηση 8



Αν t_1 είναι η στιγμή της συνάντησης, τα δύο σώματα μέχρι τότε θα κινούνται χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1 - \cancel{t_0}^{0} = t_1$.

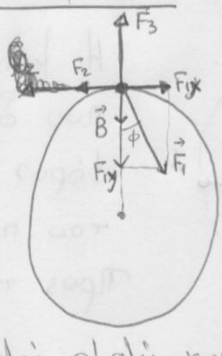
Για το σώμα που κινείται κυκλικά είναι $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega}$ (1)

Για το σώμα που κινείται ευθύγραμμα είναι $(AP) = \upsilon\cdot\Delta t \rightarrow$ $\upsilon = \frac{(AP)}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{(AP)}{\upsilon}$ (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει

$\frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{(AP)}{\upsilon} \rightarrow \upsilon = \frac{\omega(AP)}{\Delta\theta} = \frac{\frac{\pi}{6}\cdot 10}{\frac{\pi}{3}} = 5\, m/s$ και από την

(1) $\rightarrow \Delta t = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 2s$.

Άσκηση 9



$F_{1x} = F_1 ημφ = 200 \cdot 0{,}8 = 160N$

$F_{1y} = F_1 συνφ = 200 \cdot 0{,}6 = 120N$

$B = mg = 50N$

Αφού το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται να είναι προς το κέντρο.

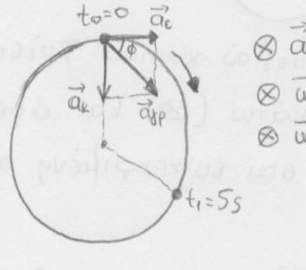
Άρα πρέπει $F_2 = F_{1x}$ άρα $F_2 = 160N$.

Είναι $\Sigma F = \frac{mv^2}{R}$ και $\Sigma F = B + F_{1y} - F_3 = 50 + 120 - 150 = 20N$

άρα έχουμε $v = \sqrt{\frac{\Sigma F R}{m}} = \sqrt{400} = 20 m/s.$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 9



α) Εφόσον το σώμα από τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και μετά, δεν αλλάζει φορά περιστροφής μας συμφέρει να δουλέψουμε με μέτρα και όχι με αλγεβρικές τιμές.
Παίρνω τη σχέση $|\omega|=|\omega_0|+a_{\gamma\omega\nu}\Delta t$ για το χρονικό διάστημα $\Delta t=t_1-t_0=5s-0=5s$ και έχω: $|\omega_1|=5+4\cdot5 \rightarrow |\omega_1|=25\ rad/s$
Η κατεύθυνση της $\vec{\omega}_1$ δεν προκύπτει από αυτό το αποτέλεσμα αλλά είναι φανερό ότι είναι ίδιας κατεύθυνσης με την $\vec{\omega}_0$.

β) Βρίσκω πρώτα τη συνολική γωνία που έχει διαγράψει το σώμα που είναι όλη προς την ίδια κατεύθυνση, από τη σχέση
$|\Delta\theta|=|\omega_0|\Delta t+\frac{1}{2}|a_{\gamma\omega\nu}|\Delta t^2=5\cdot5+\frac{1}{2}\cdot4\cdot5^2=25+50=75\ rad$
Άρα ο αριθμός των περιστροφών που έχει διαγράψει το σώμα σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι $N=\frac{|\Delta\theta|}{2\pi}=\frac{75}{2\pi}\simeq\frac{75}{6{,}28}\simeq11{,}94$

γ) $|a_\kappa|=\frac{|u_\delta|^2}{R}=|\omega_0|^2R=25\ m/s^2$

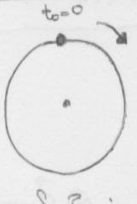
$|a_\varepsilon|=|a_{\gamma\omega\nu}|\cdot R=4\ m/s^2$

$|a_{\gamma\rho}|=\sqrt{|a_\kappa|^2+|a_\varepsilon|^2}=\sqrt{25^2+4^2}=\sqrt{641}\simeq25{,}3\ m/s^2$

$\varepsilon\varphi\phi=\frac{|a_\kappa|}{|a_\varepsilon|}=\frac{25}{4}=6{,}25 \rightarrow \phi=\tau o\xi\varepsilon\varphi6{,}25 \rightarrow \phi=81^\circ$

δ) $\Sigma\vec{F}=m\vec{a}_{\gamma\rho} \longrightarrow |\Sigma F|=m|a_{\gamma\rho}|=50{,}6N$
με ίδια κατεύθυνση με την $\vec{a}_{\gamma\rho}$

Άσκηση 10



$\circlearrowright +$ ή $\otimes +$

α) Με τον κανόνα του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά της $\vec{\omega}_0$ είναι προς τα κάτω ($\otimes$) και άρα η φορά της $\vec{a}_{γων}$ που είναι αντίθετη στη συγκεκριμένη άσκηση, είναι προς τα πάνω ($\odot$).

β) Αφού η $\vec{\omega}_0$ και $\vec{a}_{γων}$ έχουν αντίθετη φορά, η κίνηση θα είναι αρχικά τουλάχιστον επιβραδυνόμενη. Άρα εδώ σε αντίθεση με την προηγούμενη άσκηση, μας συμφέρει να δουλέψουμε με αλγεβρικές τιμές. Θεωρώ λοιπόν μια θετική φορά π.χ. την προς τα κάτω που αντιστοιχεί σε δεξιόστροφη κίνηση και εφαρμόζω τη σχέση $\omega=\omega_0+a_{γων}\Delta t$. Έτσι αρχικά εφαρμόζω για το χρονικό διάστημα από $t_0=0$ έως $t_1=6s$ και έχω $\omega_1=(+20)+(-2)\cdot(6-0) \rightarrow \omega_1=20-12=8\ rad/s$.

Αφού $\omega_1>0$ άρα το σώμα τη στιγμή $t_1=6s$ εξακολουθεί να περιστρέφεται δεξιόστροφα.

Για να βρω τη γωνιακή ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_2=12s$ μπορώ να εφαρμόσω την προηγούμενη σχέση είτε για το χρονικό διάστημα από $t_0=0$ έως $t_2=12s$ είτε για το χρονικό διάστημα από $t_1=6s$ έως $t_2=12s$. Ας το δούμε και με τους δύο τρόπους:

από $t_0=0$ έως $t_2=12s$ είναι: $\omega_2=\omega_0+a_{γων}\Delta t \rightarrow$

$\omega_2=20-2\cdot 12 \rightarrow \omega_2=-4\ rad/s$.

από $t_1=6s$ έως $t_2=12s$ είναι: $\omega_2=\omega_1+a_{γων}\Delta t \rightarrow$

$\omega_2=8-2\cdot 6=-4\ rad/s$

Αφού $\omega_2<0$, άρα τη χρονική στιγμή $t_2=12s$ το σώμα έχει αλλάξει φορά περιστροφής και περιστρέφεται τώρα αριστερόστροφα.

γ) Παίρνω τη σχέση $\omega=\omega_0+a_{γων}\Delta t$ και εάν t_3 είναι η ζητούμενη χρονική στιγμή, την εφαρμόζω στο χρονικό διάστημα από $t_0=0$ έως t_3 που είναι $\omega=0$, άρα:

$$0=20-2(t_3-0)\rightarrow 2t_3=20\rightarrow t_3=10s$$

δ) Η γωνία βρίσκεται από τη σχέση $\Delta\theta=\omega_0\Delta t+\frac{1}{2}a_{γων}\Delta t^2$ με $\Delta t=5-0=5s$ άρα $\Delta\theta=20\cdot5-\frac{1}{2}\cdot2\cdot5^2=100-25=75\ rad$

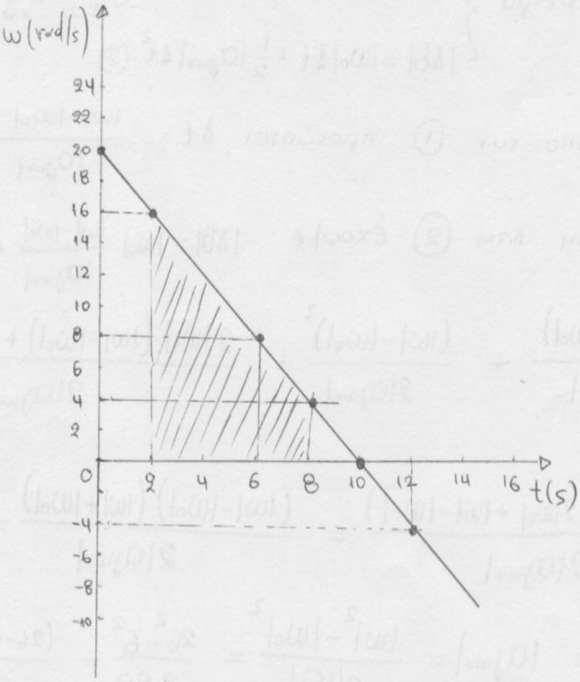
Άρα ο αριθμός περιστροφών είναι $N=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=\frac{75}{2\pi}$ περιστροφές.

ε) Φτιάχνω με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα τον παρακάτω πίνακα τιμών στον οποίο βάζω και τις χρονικές στιγμές $t=2s$ και $t=8s$ που θα χρειαστούν στο επόμενο ερώτημα:

t(s)	0	2	6	8	10	12
ω(rad/s)	20	16	8	4	0	-4

$t=2s\rightarrow\omega=20-2\cdot2=16\ rad/s$

$t=8s\rightarrow\omega=20-2\cdot8=4\ rad/s$



Παρατηρούμε ότι παρόλο που μέχρι τη στιγμή $t=10s$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη και μετά επιβραδυνόμενη, η γραφική παράσταση είναι η ίδια ευθεία η κλίση της οποίας είναι η σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ($a_{γων} = -2\ rad/s^2$) Η κίνηση είναι ομαλά μεταβαλλόμενη σε όλη τη διάρκεια της.

στ). Η απόλυτη τιμή της ζητούμενης γωνίας είναι το γραμμοσκιασμένο εμβαδό του τραπεζίου δηλαδή

$|\Delta\theta| = Εμβαδό = \frac{(16+4)\cdot 6}{2} = 60\ rad$. Αφού σε αυτό το χρονικό διάστημα η περιστροφή γίνεται κατά τη θετική φορά θα είναι $|\Delta\theta| = \Delta\theta$ άρα $\Delta\theta = 60\ rad$.

Για επαλήθευση μπορούμε να βρούμε το $\Delta\theta$ χρησιμοποιώντας τη σχέση $\Delta\theta = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_{γων} \Delta t^2$ με $\Delta t = 8-2 = 6s$ και είναι $\Delta\theta = 16\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6^2 = 96 - 36 = 60\ rad$.

α και β) άσκηση 11

Αφού το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση παίρνουμε τους τύπους με μέτρα

$$\begin{cases} |\omega| = |\omega_0| + |a_{γων}|\Delta t & (1) \\ |\Delta\theta| = |\omega_0|\Delta t + \frac{1}{2}|a_{γων}|\Delta t^2 & (2) \end{cases}$$

και κάνουμε απαλοιφή του Δt. Από την (1) προκύπτει $\Delta t = \frac{|\omega| - |\omega_0|}{|a_{γων}|}$ (3) και με αντικατάσταση στη (2) έχουμε: $|\Delta\theta| = |\omega_0| \frac{|\omega| - |\omega_0|}{|a_{γων}|} + \frac{1}{2}|a_{γων}| \frac{(|\omega| - |\omega_0|)^2}{|a_{γων}|^2}$

$$= \frac{|\omega_0|(|\omega| - |\omega_0|)}{|a_{γων}|} + \frac{(|\omega| - |\omega_0|)^2}{2|a_{γων}|} = \frac{2|\omega_0|(|\omega| - |\omega_0|) + (|\omega| - |\omega_0|)^2}{2|a_{γων}|} =$$

$$= \frac{(|\omega| - |\omega_0|)(2|\omega_0| + |\omega| - |\omega_0|)}{2|a_{γων}|} = \frac{(|\omega| - |\omega_0|)(|\omega| + |\omega_0|)}{2|a_{γων}|} = \frac{|\omega|^2 - |\omega_0|^2}{2|a_{γων}|}$$

άρα έχουμε $|a_{γων}| = \frac{|\omega|^2 - |\omega_0|^2}{2|\Delta\theta|} = \frac{26^2 - 6^2}{2\cdot 80} = \frac{(26-6)(26+6)}{2\cdot 80} = \frac{20\cdot 32}{2\cdot 80} \Rightarrow$

$|a_{γων}| = 4\ rad/s^2$ και από την (3) $\Delta t = 5s$

γ) $|\upsilon| = |\omega| \cdot R = 26 \cdot 0{,}2 = 5{,}2\ m/s^2$

δ) $|a_\kappa| = \frac{|\upsilon|^2}{R} = |\omega|^2 R = 26^2 \cdot 0{,}2 = 135{,}2\ m/s^2$

$|a_\varepsilon| = |a_{\gamma\omega\nu}| \cdot R = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8\ m/s^2$

$|a_{o\lambda}| = \sqrt{|a_\kappa|^2 + |a_\varepsilon|^2} \xrightarrow{|a_\kappa| >> |a_\varepsilon|} \sqrt{|a_\kappa|^2} \cong |a_\kappa| = 135{,}2\ m/s^2$

Άσκηση 12

α. Από τη στιγμή $t_0 = 0$ έως τη στιγμή $t = 20s$, αφού η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή θα είναι $a_{\gamma\omega\nu} = 0$. Από τη στιγμή $t = 20s$ και μετά θα είναι $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{-40-10}{30-20}$ $\longrightarrow a_{\gamma\omega\nu} = -5\ rad/s^2$. Άρα συνοπτικά:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 20s \\ -5, & t \ge 20s \end{cases}$$

β. Για το χρονικό διάστημα από $t_0 = 0$ έως $t = 20s$, η κίνηση είναι ομαλή κυκλική άρα είναι $\Delta\theta_1 = \omega \Delta t = 10(20-0) = 200\ rad$.

Για το χρονικό διάστημα από $t = 20s$ έως $t = 22s$ θα είναι

$$\Delta\theta_2 = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} \Delta t^2 = 10(22-20) + \frac{1}{2}(-5) \cdot (22-20)^2 =$$

$$= 10 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 20 - 10 = 10\ rad.$$

Άρα $\Delta\theta_{o\lambda} = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = 210\ rad.$

Αν θέλετε για εξάσκηση να κάνετε το ερώτημα και με τον εξής τρόπο: Να κάνετε τη γραφική παράσταση $\omega - t$ και να υπολογίσετε το αντίστοιχο εμβαδό.

γ. Την $t = 10s$ η κίνηση είναι ομαλή κυκλική άρα

$$a_{\kappa\varepsilon} = a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = 100 \cdot 0{,}02 = 2\ m/s^2$$

Άσκηση 13

Αφού η γωνία που διαγράφει το σώμα μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό (ευθεία), άρα η κίνηση είναι ομαλή κυκλική και η γωνιακή ταχύτητα που είναι σταθερή είναι η κλίση της ευθείας δηλαδή $\omega = \varepsilon\varphi\phi = \frac{30}{10} = 3\ rad/s$. Άρα όλες τις χρονικές στιγμές που αναφέρει η άσκηση είναι $\omega = 3\ rad/s$ και $a_{\gamma\omega\nu} = 0$.

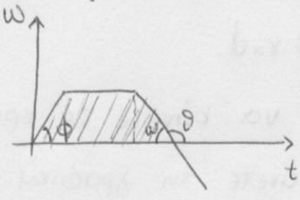
Άσκηση 14

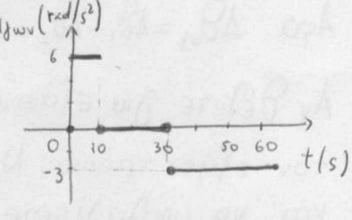
α) Το σώμα ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$. Έστω ότι θετική φορά είναι η δεξιόστροφη. Το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t=10s$ εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Από τη στιγμή $t=10s$ έως τη στιγμή $t=30s$, η κίνηση είναι πάλι δεξιόστροφη ομαλή κυκλική. Από τη στιγμή $t=30s$ και μετά αποκτά σταθερή επιτάχυνση (γωνιακή) αντίθετης φοράς απ' αυτήν που είχε αποκτήσει στο χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t=10s$. Η γωνιακή επιτάχυνση αυτή είναι σταθερή και μετά την $t=50s$. Η κίνηση του σώματος μπορεί να χαρακτηριστεί ομαλά μεταβαλλόμενη από την $t=30s$ και μετά ή μπορεί να χαρακτηριστεί ομαλά επιβραδυνόμενη από $t=30s$ έως $t=50s$ όπου σταματά στιγμιαία και ομαλά επιταχυνόμενη από $t=50s$ με αντίθετη φορά περιστροφής δηλαδή αριστερόστροφα.

β) Από $0 \le t < 10s$ $\quad a_{\gamma\omega\nu} = \text{κλίση} = \frac{60-0}{10-0} = 6\ rad/s^2 = \varepsilon\varphi\phi$

Από $10s \le t \le 30s$ είναι $a_{\gamma\omega\nu} = 0$

Από $t > 30s$ είναι $a_{\gamma\omega\nu} = \varepsilon\varphi\theta = -\varepsilon\varphi\omega = -\frac{60}{50-30} = -\frac{60}{20} = -3\ rad/s^2$





γ) Η ζητούμενη γωνία είναι το εμβαδό του τραπεζίου σε απόλυτη τιμή δηλαδή $|\Delta\theta| = \text{εμβαδό} = \frac{(50+20)60}{2} = 2100\ rad$. Αφού στο χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t=50s$ το σώμα κινείται προς τη θετική φορά (εξάλλου συνεχώς $\omega > 0$) θα είναι $\Delta\theta > 0$ άρα $\Delta\theta = |\Delta\theta| = 2100\ rad$.